On considère la série de fonctions
$$u(x) = \sum_{n\geq 0} u_n(x) \qquad \text{où} \qquad u_n(x) = e^{-x\sqrt{n}}$$

a) Trouver le domaine de définition de u, et préciser certains intervalles où $u(x)$ converge uniformément.

~~b) Y a-t'il convergence uniforme de $u(x)$ sur $\mathbb{R}_+^*$~~ ?

b) Donner un équivalent de $u(x)$ quand x tend vers 0. On pourra comparer $\sum e^{-x\sqrt{n}}$ à l'intégrale $\int_0^\infty e^{-x\sqrt{t}}\,dt$.

---

a) Si $a>0$ est fixé, pour $x \geq a$:
$$e^{-x\sqrt{n}} \leq e^{-a\sqrt{n}} = o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$
Il y aura donc convergence normale de $u(x)$ pour $x \geq a$, donc uniforme sur $[a, +\infty[$. Ceci pour tout $a>0$. f sera donc définie et continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

Si $x=0$, $u_n(x) = 1$ $\forall n$ et $\sum u_n$ diverge

Si $x<0$, $\lim_{n\to+\infty} u_n(x) = +\infty$ et $\sum u_n$ diverge

~~b) S'il y avait convergence uniforme de $\sum u_n$ sur $\mathbb{R}_+^*$, on aurait~~

b) Si $x>0$ et $t \in [n, n+1]$, on a $e^{-x\sqrt{n+1}} \leq e^{-x\sqrt{t}} \leq e^{-x\sqrt{n}}$, puis
$$u(x) - 1 \leq \int_0^\infty e^{-x\sqrt{t}}\,dt \leq u(x)$$

(Hallak et Kallal)

$$\int_0^\infty e^{-x\sqrt{t}}\,dt = 2\int_0^\infty s\,e^{-xs}\,ds = 2\left(\left[s\,\frac{e^{-xs}}{-x}\right]_0^\infty - \int_0^\infty \frac{e^{-xs}}{-x}\,ds\right)$$

$$= \frac{2}{x}\int_0^\infty e^{-xs}\,ds = \frac{2}{x^2}$$

Soit $\quad \dfrac{2}{x^2} \leqslant u(x) \leqslant 1 + \dfrac{2}{x^2}$.

Concluons :

$$\boxed{u(x) \underset{0^+}{\sim} \frac{2}{x^2}}$$

Mq la série $\sum \frac{(-1)^n}{n+x}$ est uniformément convergente sur $\mathbb{R}_+$ mais n'est pas normalement convergente.

$\sup_{x\in\mathbb{R}_+} \frac{1}{n+x} \geq \frac{1}{n}$ assure la divergence de $\sum \left\|\frac{(-1)^n}{n+x}\right\|_\infty$.

La "règle d'Abel uniforme" s'applique à la série alternée $\sum \frac{(-1)^n}{n+x}$ puisque $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n+x} = 0$ uniformément pour $x \in \mathbb{R}_+$ (En effet : $\forall x\in\mathbb{R}_+ \left|\frac{1}{n+x}\right| \leq \frac{1}{n} \to 0$)

Donc $\sum \frac{(-1)^n}{n+x}$ converge uniformément. (Voir NB 2))

CQFD

NB : 1) Preuve de la règle d'Abel Uniforme

Th : a_n, b_n fcts de $E \to \mathbb{C}$.

Si 1) $B_n = \sum_{k=0}^{n} b_k$ est uniformément bornée (ie $\exists B \ \sup_{x\in E} |B_n(x)| \leq B$)

2) $\lim_{n\to+\infty} a_n(x) = 0$ uniformément pour $x \in E$

3) $(a_n(x))_n$ décroît pour tt x (ainsi $a_n(x) \in \mathbb{R}_+$)

Alors $\sum a_n b_n$ est uniformément convergente sur E.

preuve : On utilise la transformation d'Abel

$$\sum_{n=0}^{N} a_n b_n = a_N B_N + \sum_{n=0}^{N-1} (a_n - a_{n+1}) B_n$$

* $(a_N B_N)_N$ convergera uniformément vers 0 puisque

$\forall x\in E \quad |a_N(x) B_N(x)| \leq B\,|a_N(x)|$

où $a_N \to 0$ uniformément

* Il reste à prouver que $\sum_{n=0}^{N-1} (a_n - a_{n+1}) B_n$ converge uniformément. Pour cela, on utilise le Critère de Cauchy Uniforme :

(Hallal & Kallal, adapté)

$$\forall x\in E \quad \left|\sum_{n=p}^{q}(a_n-a_{n+1})B_n\right| \leq B\sum_{n=p}^{q}(a_n(x)-a_{n+1}(x))$$

$$\leq B\,(a_p(x)-a_{q+1}(x))$$

$$\leq B\ a_p(x)$$

et la convergence uniforme de $a_p(x)$ vers 0 pour $p\to+\infty$ montre que :

$$\forall \varepsilon>0 \quad \exists P \qquad q\geq p>P \Rightarrow \sup_{x\in E}\left|\sum_{n=p}^{q}(a_n-a_{n+1})B_n\right| \leq \varepsilon$$

CQFD

NB 2) : Résoudre cet exercice sans utiliser la règle d'Abel Uniforme.

On utilise la transformation d'Abel ~~avec~~ :

$$\sum_{n=0}^{N} a_n b_n = a_N B_N + \sum_{n=0}^{N-1}(a_n-a_{n+1})B_n$$

avec $a_n=\dfrac{1}{n+x}$ et $b_n=(-1)^n$.

$$\sum_{n=0}^{N} b_n \doteq \frac{(-1)^N}{N+x} + \sum_{n=0}^{N-1}\underbrace{\left(\frac{1}{n+x}-\frac{1}{n+1+x}\right)}_{=\frac{1}{(n+x)(n+1+x)}}(-1)^n$$

Le premier terme converge uniformément vers 0 car $\left|\dfrac{(-1)^N}{N+x}\right| \leq \dfrac{1}{N} \quad \forall x\in\mathbb{R}_+$

La somme converge uniformément car normalement. En effet :

$$\sum \sup_{x\in\mathbb{R}_+}\frac{1}{(n+x)(n+1+x)} \leq \sum\frac{1}{n(n+1)}$$

CQFD

On définit la fonction $u(x) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x)$ où $u_n(x) = \frac{e^{-nx}}{1+n^2}$

a) Trouver le domaine de définition de u

b) Etudier sa continuité, sa dérivabilité. On pourra montrer que u n'est pas dérivable en 0 en utilisant le Théorème des Accroissements Finis et la croissance de u'.

a) $x \geq 0 \Rightarrow e^{-nx} \leq 1 \Rightarrow 0 \leq \frac{e^{-nx}}{1+n^2} \leq \frac{1}{1+n^2}$ montre que $u(x)$ converge normalement pour $x \in \mathbb{R}_+$.

Si $x < 0$, on aura pour n suffisamment grand :

$$\frac{e^{-nx}}{1+n^2} \geq \frac{n}{1+n^2} \sim \frac{1}{n}$$

$\sum \frac{1}{n}$ diverge, donc $u(x)$ divergera aussi.

Ccl : $u(x)$ converge normalement sur $\mathbb{R}_+$, et par suite sera continue sur $\mathbb{R}_+$.

b) u_n est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et $u_n'(x) = \frac{-ne^{-nx}}{1+n^2}$. Si $x \in [a, +\infty[$, où $a > 0$ est fixé à l'avance,

$$|u_n'(x)| \leq \frac{ne^{-na}}{1+n^2}$$

Comme $|e^{-na}| \leq \frac{1}{n}$ si $n > N$, on constate que $\left|\frac{ne^{-na}}{1+n^2}\right| \leq \frac{1}{1+n^2}$ puis la convergence normale de $\sum u_n'(x)$ sur $[a, +\infty[$.

(cf Hallak & Kallal)

Th : $\sum u_n(x)$ série de fonctions de $I \to \mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$) (I int. de $\mathbb{R}$)

Si - $\sum u_n(x)$ cv simplement sur I

- $\sum u_n'(x)$ cv uniformément sur I

Alors $u_n(x) \doteq \sum u_n(x)$ est dérivable sur I et $u'(x) = \sum u_n'(x)$

Ccl : Ce Th. mq $u(x) = \sum \frac{e^{-nx}}{1+n^2}$ est dérivable sur $[a, +\infty[$ pour tout $a>0$, donc dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, et $u'(x) = \sum \frac{-n e^{-nx}}{1+n^2}$.

* u n'est pas dérivable en 0

$\forall x>0 \quad \exists c_x \in]0,x[\quad \frac{u(x)-u(0)}{x} = u'(c_x)$

[Schéma : axe avec les points 0, c_x, x]

Comme u' est croissante sur $\mathbb{R}_+^*$, $u'(c_x) \leq u'(x)$ et :

$$\forall x>0 \qquad \frac{u(x)-u(0)}{x} \leq u'(x)$$

Supposons par l'absurde que u soit dérivable en 0. Alors $\lim_{x\to 0_+} \frac{u(x)-u(0)}{x}$ existe. Notons-là ℓ. Pour tout $N \in \mathbb{N}$

$$\frac{u(x)-u(0)}{x} \leq u'(x) \leq \sum_{n=0}^{N} \frac{-n e^{-nx}}{1+n^2} \leq -e^{-Nx} \sum_{n=0}^{N} \frac{n}{1+n^2}$$

montre que

$$\ell \leq -\sum_{n=0}^{N} \frac{n}{1+n^2}$$

en passant à la limite pour x tendant vers 0_+. En faisant maintenant tendre N vers $+\infty$ dans cette inégalité :

$$\ell \leq -\infty$$

absurde.

CQFD

Soit f la fonction 2π-périodique coïncidant avec la fonction $x \mapsto \alpha x^2+\beta x+\gamma$ sur l'intervalle $[0,2\pi[$.

a) f est-elle développable en série de Fourier pour toute valeur de x ? Cette série converge-t'elle uniformément sur tout intervalle.

b) Calculer les coefficients de Fourier de f. En déduire α, β, γ de sorte que cette série se réduise à $\sum_{n\geq 1} \frac{\cos nx}{n^2}$. En déduire $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}$.

---

a) Soit f 2π-périodique et loc. intégrable. On sait que si f s'exprime comme la somme d'une série trigonométique $f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n\geq 1} a_n \cos nx + b_n \sin nx$ et que cette série converge uniformément, alors :

$$\int_0^{2\pi} f(x) \sin px = \pi b_p \qquad \text{et} \qquad \int_0^{2\pi} f(x) \cos px = \pi a_p$$

a_p et b_p, ainsi définis, s'appellent les "coefficients de Fourier trigonométiques" de f.

Ici f est C^1 par morceaux. Le Th. de Dirichlet montre que la série de Fourier $\frac{a_0}{2} + \sum a_n \cos nx + b_n \sin nx$ converge simplement vers $\frac{f(x+)+f(x-)}{2}$.

Si f est continue sur $\mathbb{R}$, ie si $f(\pi)=f(-\pi) \Leftrightarrow \alpha\pi^2+\beta\pi+\gamma = \alpha\pi^2-\beta\pi+\gamma \Leftrightarrow \beta=0$, la série de Fourier de f converge normalement, donc uniformément sur $\mathbb{R}$.

(cf. Th. Dirichlet Ramis IV 3.5.4. 2°/ Co I et 3°/ Th)

b) Calculons $a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x) \cos nx \, dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} (\alpha x^2+\beta x+\gamma) \cos nx \, dx$ si $n\geq 1$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x) \sin nx \, dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} (\alpha x^2+\beta x+\gamma) \sin nx \, dx$$

Comme :

$$\int_0^{2\pi} x^2 \cos nx = \left[x^2 \frac{\sin nx}{n}\right]_0^{2\pi} - \frac{2}{n}\int_0^{2\pi} x \sin nx = \frac{4\pi}{n^2}$$

$$\int_0^{2\pi} x \sin nx = \left[x \frac{-\cos nx}{n}\right]_0^{2\pi} + \frac{1}{n}\int_0^{2\pi} \cos nx = -\frac{2\pi}{n}$$

$$\int_0^{2\pi} x \cos nx = \left[x \frac{\sin nx}{n}\right]_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} \frac{\sin nx}{n} = 0$$

$$\int_0^{2\pi} x^2 \sin nx = \left[x^2 \frac{-\cos nx}{n}\right]_0^{2\pi} + \frac{2}{n}\int_0^{2\pi} x \cos nx = -\frac{4\pi^2}{n}$$

On trouve : $\begin{cases} a_n = \dfrac{4\alpha}{n^2} \\ b_n = -\dfrac{4\pi}{n}\alpha - \dfrac{2}{n}\beta \end{cases}$

Ainsi : $\begin{cases} a_n = \dfrac{1}{n^2} \\ b_n = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = \dfrac{1}{4} \\ \beta = -\dfrac{\pi}{2} \end{cases}$ puis $a_0 = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} \alpha x^2 + \beta x + \gamma \, dx = \dfrac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \dfrac{x^2}{4} - \dfrac{\pi}{2}x \, dx$

$= -\dfrac{\pi^2}{3}$ si l'on choisit $\gamma = 0$.

$\dfrac{a_0}{2} + \displaystyle\sum_{n\geq 1} \dfrac{\cos nx}{n^2}$ convergera donc simplement vers $f(x) = \dfrac{x^2}{4} - \dfrac{\pi}{2}x$ si $x \in]0, 2\pi[$,

ou vers $\dfrac{f(0+) + f(0-)}{2} = 0$ si $x = 0$ (puisque $f(0+) = 0$ et $f(0-) = f(2\pi) = \dfrac{4\pi^2}{4} - \pi^2 = 0$)

On en déduit pour $x = 0$:

$$\boxed{\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2} = -\frac{a_0}{2} = \frac{\pi^2}{6}.}$$

<u>NB</u> : On peut reprendre tout l'exercice avec f paire, 2π-périodique et telle que $f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$ sur $[0, \pi]$. f sera alors continue sur $\mathbb{R}$ donc $\dfrac{a_0}{2} + \sum a_n \cos nx + b_n \sin nx$ convergera uniformément vers f sur tout intervalle compact $[a, b]$.

f C^1 par morceaux et continue

$\Downarrow$

La série de Fourier conv. unif. sur tout compact.